

ANTÓNIO MANUEL SARMENTO BATISTA

MATEMÁTICA FINANCEIRA

O valor do dinheiro
ao longo do tempo

VidaEconómica



ÍNDICE

NOTA DE APRESENTAÇÃO	21
I - Introdução	25
II – Capitalização simples	29
2.1 Introdução.....	31
2.2 Fórmula geral da capitalização simples.....	32
2.3 Cálculo do capital inicial (C_0).....	33
2.4 Cálculo do juro (J).....	34
2.5 Cálculo do tempo t	36
2.6 Cálculo da taxa de juro i	37
2.7 Cálculo da taxa de juro média em capitalização simples.....	38
2.8 Equivalência de capitais no regime de capitalização simples.....	41
2.9 Fracionamento da taxa de juro.....	45
2.10 Equivalência de taxas em capitalização simples	47
2.11 Ano comercial e ano civil.....	51
2.12 Relação entre o juro comercial e o juro civil.....	52
2.13 Juros de vários capitais. Método do divisor fixo	54
2.14 Estudo analítico e representação gráfica da função capitalização simples	56
III – Desconto simples	59
3.1 Introdução.....	61
3.2 Juro simples.....	62
3.3 Desconto por dentro, desconto racional, desconto verdadeiro ou desconto matemático (Regime de juro simples)	62
3.4 Desconto por fora ou desconto bancário (Regime de juro simples)	65
3.5 Comparação entre o desconto por fora e o desconto por dentro.....	67
3.6 Relação entre o desconto por fora e o desconto por dentro.....	68

3.7 Estudo analítico e representação gráfica das funções desconto por fora e desconto por dentro (juro simples)	72
3.8 Equivalência de taxas. Taxa de juro nominal e taxa de juro efetiva	77
3.9 Desconto de vários capitais. Método do divisor fixo	81
3.10 Vencimento comum e vencimento médio	84
3.11 Produto líquido na negociação de efeitos comerciais. Desconto de letras....	93
3.12 Desconto a <i>forfait</i>	96
3.13 Cálculo do <i>forfait</i> ideal.....	99
IV – Capitalização composta.....	103
4.1 Introdução.....	105
4.2 Fórmula geral da capitalização composta.....	105
4.3 Cálculo do capital inicial (C_0).....	108
4.4 Cálculo do tempo (t)	110
4.5 Cálculo da taxa de juro (i).....	112
4.6 Cálculo da taxa de juro média em capitalização composta.....	113
4.7 Equivalência de capitais em capitalização composta	116
4.8 Capitalização composta para períodos fracionários	120
4.9 Convenção exponencial e linear.....	122
4.10 Interpolação linear e convenção linear	123
4.11 Estudo analítico e representação gráfica da função de capitalização composta	125
4.12 Interpolação direta e inversa	127
4.13 Comparação entre capitalização simples e capitalização composta	130
4.14 Fracionamento da taxa de juro.....	131
4.15 Equivalência de taxas em capitalização composta	133
4.16 Taxa equivalente e taxa proporcional. Conclusões	134
4.17 Taxa nominal (r_k)	135
V - Desconto composto.....	139
5.1 Introdução.....	141
5.2 Juro composto	142
5.3 Desconto por dentro, desconto racional ou desconto matemático (Regime de juro composto)	143
5.4 Desconto por fora ou desconto comercial (Regime de juro composto)..	144
5.5 Comparação entre o desconto por fora e o desconto por dentro em regime de juro composto.....	147
5.6 Estudo analítico e representação gráfica comparada das funções de desconto por fora (D_f) e desconto por dentro (D_d).....	149

ÍNDICE

5.6.1 Desconto por fora.....	149
5.6.2 Desconto por dentro	150
5.7 Equivalência entre taxa de juro (i) e taxa de desconto (d).....	152
VI - Rendas	157
6.1 Conceito de renda	159
6.2 Classificação das rendas	159
6.3 Considerações gerais.....	161
6.4 Rendas anuais constantes.....	163
6.4.1 Valor atual de uma renda imediata anual constante de termos postecipados.....	163
6.4.1.1 Cálculo da anuidade (α).....	169
6.4.1.2 Cálculo da taxa de juro (i).....	170
6.4.1.3 Cálculo do número de termos (t).....	174
6.4.1.3.1 Cálculo do número de termos não inteiros.....	175
6.4.2 Valor final de uma renda imediata anual constante de t termos postecipados (V_f)	182
6.4.3 Cálculo de α , i , e t em função do valor final (V_f).....	188
6.4.3.1 Cálculo da anuidade (α).....	188
6.4.3.2 Cálculo da taxa de juro (i).....	189
6.4.3.3 Cálculo do número de termos (t).....	189
6.4.4 Relação entre $a_{t i}$ e $S_{t i}$ e seus inversos.....	193
6.4.5 Valor atual e final de uma renda imediata anual constante de t termos antecipados.....	194
6.4.5.1 Cálculo do valor atual (V_a).....	194
6.4.5.2 Cálculo do valor final (V_f).....	199
6.4.6 Valor atual e final de uma renda diferida anual constante de t termos postecipados.....	200
6.4.6.1 Cálculo do valor atual (V_a).....	200
6.4.6.2 Cálculo do valor final (V_f).....	202
6.4.7 Valor atual e final de uma renda diferida anual constante de t termos antecipados.....	203
6.4.7.1 Cálculo do valor atual (V_a)	203
6.4.7.2 Cálculo do valor final (V_f).....	207
6.4.8 Valor atual de uma renda anual constante de t termos infinitos (renda perpétua).....	211
6.4.8.1 Renda imediata postecipada de termos infinitos	212
6.4.8.2 Renda imediata antecipada de termos infinitos	213

6.4.8.3 Renda diferida postecipada de termos infinitos.....	214
6.4.8.4 Renda diferida antecipada de termos infinitos.....	215
6.4.9 Cálculo de α e i numa renda anual constante de t termos infinitos	216
6.5 Rendas constantes fracionadas	217
6.5.1. Introdução	217
6.5.2 Cálculo do valor atual em função da taxa de juro k-esimal i_k	218
6.5.3 Cálculo do valor atual em função da taxa de juro anual i	222
6.5.4 Cálculo do valor final em função da taxa de juro k-esimal i_k	227
6.5.5 Cálculo do valor final em função da taxa de juro anual i	229
6.5.6 Perpetuidade.....	231
6.5.7 Rendas fracionadas: imediata antecipada, diferida postecipada e diferida antecipada	234
6.6 Rendas constantes com periodicidade superior ao ano.....	239
6.6.1 Introdução	239
6.6.2 Cálculo do valor atual em função da taxa supra-anual $i^{(h)}$	239
6.6.3 Cálculo do valor atual em função da taxa anual i	241
6.6.4 Cálculo do valor final.....	245
6.6.5 Perpetuidade.....	248
6.6.6 Notas e observações	251
6.7 Rendas anuais variáveis.....	254
6.7.1 Renda anual variável em progressão aritmética	254
6.7.1.1 Cálculo do valor atual	255
6.7.1.2 Cálculo do valor final.....	259
6.7.2 Renda anual perpétua variável em progressão aritmética.....	264
6.7.3 Observações.....	266
6.7.4 Renda anual variável em progressão geométrica	272
6.7.4.1 Cálculo do valor atual	272
6.7.4.2 Cálculo do valor final.....	275
6.7.5 Renda anual perpétua variável em progressão geométrica.....	278
6.7.6 Observações.....	282
VII - Amortização de empréstimos	283
7.1 Introdução.....	285
7.2 Amortização de empréstimos mediante reembolso único.....	286
7.2.1 Com pagamento único de juros conjuntamente com o capital.....	287
7.2.2 Com pagamento periódico de juros	288
7.3 Cancelamento antecipado de um empréstimo amortizável com reembolso único de capital e juros	292

7.3.1 Com cancelamento total $[(i)' \geq (i)]$	292
7.3.2 Com cancelamento parcial $(i)' \geq (i)$	293
7.3.3 Com cancelamento total $(i)' < (i)$	297
7.3.4 Com cancelamento parcial $(i)' < (i)$	298
7.4 Cancelamento antecipado de um empréstimo amortizável com reembolso único de capital e pagamento periódico de juros	301
7.4.1 Com cancelamento total $[(i)' \geq (i)]$	301
7.4.2 Cancelamento parcial $[(i)' \geq (i)]$	301
7.4.3 Com cancelamento total $[(i)' < (i)]$	302
7.4.4 Com cancelamento parcial $[(i)' < (i)]$	303
7.5 Amortização de um empréstimo mediante uma renda	312
7.5.1 Sistema francês ou de amortização progressiva	313
7.5.1.1 Tabela de amortização de um empréstimo pelo sistema francês..	315
7.5.1.2 Cálculo da <i>h-ésima</i> linha da tabela de amortização	318
7.6 Amortização de um empréstimo mediante uma renda anual constante diferida <i>d</i> anos e postecipada	325
7.7 Amortização de um empréstimo mediante uma renda constante fracionada	330
7.8 Amortização de empréstimos mediante quotas de amortização constantes ..	333
7.8.1 Cálculo dos elementos da tabela de amortização	334
7.9 Amortização de empréstimos com juros antecipados (Sistema alemão)..	339
7.9.1 Cálculo dos elementos da tabela de amortização	342
7.10 Fundo de amortização (Sistema americano)	352
7.10.1 Cálculo dos elementos da tabela de reconstrução	355
7.11 Usufruto de um empréstimo, propriedade plena, nua propriedade e domínio direto	360
7.11.1 Algumas definições genéricas em termos não financeiros	360
7.11.2 Reserva matemática, valor ou plena propriedade de um empréstimo	361
7.11.3 Cálculo da nua propriedade (NP_h)	364
7.11.3.1 Cálculo da nua propriedade pelo sistema francês	364
7.11.3.2 Cálculo da nua propriedade mediante quotas de amortização constantes	367
7.11.3.3 Cálculo da nua propriedade pelo sistema alemão	368
7.11.4 Cálculo do usufruto	369
7.11.4.1 Cálculo do usufruto pelo sistema francês	370
7.11.4.2 Cálculo do usufruto mediante quotas de amortização constantes.	370
7.11.4.3 Cálculo do usufruto pelo sistema alemão	371

VIII - Empréstimos por obrigações.....	377
8.1 Introdução.....	379
8.2 Amortização de um empréstimo obrigacionista mediante uma renda anual constante	383
8.2.1 Cálculo dos elementos da tabela de amortização de um empréstimo obrigacionista que se amortiza mediante uma renda anual constante	384
8.2.2 Cálculo da <i>h-ésima</i> linha da tabela de amortização de um empréstimo por obrigações	389
8.3 Amortização de um empréstimo por obrigações com prémio de reembolso constante	397
8.4 Empréstimo obrigacionista amortizável ao par com prémio anual de lote constante.....	406
8.5 Empréstimo obrigacionista amortizável com prémio de reembolso e lote anual constante	409
8.6 Empréstimo obrigacionista amortizável ao par mediante quotas de amortização constantes	413
IX - Taxa de juro efetiva de um empréstimo.....	419
9.1 Introdução.....	421
9.2 Taxa efetiva de rendimento de um empréstimo.....	422
9.2.1 Empréstimo amortizado mediante reembolso único de capital e pagamento de juros ao fim de t anos	422
9.2.2 Empréstimo amortizado mediante reembolso único de capital com pagamento periódico de juros	430
9.3 Taxa efetiva do custo de um empréstimo.....	432
9.3.1 Empréstimo amortizado mediante reembolso único de capital e pagamento de juros no fim de t anos.....	433
9.3.2 Empréstimo amortizado mediante reembolso único de capital, com pagamento periódico de juros	436
9.4 Cálculo do custo efetivo de empréstimos, nas operações bancárias mais comuns	440
9.4.1 Empréstimo amortizado com reembolso único de capital e pagamento antecipado de juros	440
9.4.2 Empréstimo amortizado mediante reembolso único de capital e pagamento periódico de juros	444
9.4.3 Empréstimo amortizado mediante pagamentos periódicos constantes	449
9.4.4 Empréstimo amortizado mediante quotas constantes.....	454

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Representação esquemática de diversas aplicações do lucro.....	28
Figura 2 - Representação esquemática do fator de capitalização aplicado ao capital inicial, em regime de juro simples.....	32
Figura 3 - Vários capitais aplicados a diferentes taxas de juro.....	39
Figura 4 - Substituição de vários capitais por um único aplicados à mesma taxa de juro i	39
Figura 5 - No momento t os capitais C_1 e C_2 atualizados à taxa de juro i , se apresentarem valores iguais, dizem-se equivalentes.....	41
Figura 6 - No momento t o capital C_1 sendo capitalizado e o capital C_2 sendo atualizado ambos à mesma taxa de juro i , se apresentarem valores iguais, dizem-se equivalentes.....	42
Figura 7 - No momento t os capitais C_1 e C_2 capitalizados à mesma taxa de juro i , se apresentarem valores iguais, dizem-se equivalentes.....	43
Figura 8 - Representação esquemática do <i>fator de capitalização</i> de um capital, em regime de juro simples.....	61
Figura 9 - Representação esquemática do fator de atualização de um capital, em regime de juro simples.....	62
Figura 10 - Representação esquemática do desconto por dentro de um capital, em regime de juro simples.....	63
Figura 11 - Representação esquemática do desconto por fora dado pela diferença entre C_t e V_a	66
Figura 12 - Representação esquemática do desconto por fora.....	66
Figura 13 - Desconto por fora dado pela capitalização do desconto por dentro pelo fator de capitalização simples.....	69
Figura 14 - O desconto por dentro é igual ao produto do desconto por fora pelo fator de atualização simples.....	69

Figura 15 - Representação esquemática do efeito da aplicação da taxa de juro efetiva ao valor atual de um efeito comercial.....	78
Figura 16 - valores nominais das letras cujos vencimentos são: d_1, d_2, \dots, d_t respetivamente.....	84
Figura 17 - Representação esquemática da atualização de vários capitais.....	85
Figura 18 - Conjunto de vários capitais referentes a várias letras para as quais se pretende substituir por uma única letra.....	86
Figura 19 - Letra única que substitui o conjunto anterior.....	86
Figura 20 - Conjunto de vários capitais referentes a várias letras para as quais se pretende substituir por uma única letra.....	87
Figura 21 - Letra única que substitui o conjunto anterior.....	87
Figura 22 - Representação esquemática do efeito do fator de capitalização em regime de juro composto.....	107
Figura 23 - Representação esquemática da atualização de um capital C_t através do fator de atualização $(1 + i)^{-t}$	109
Figura 24 - Vários capitais aplicados a diferentes taxas de juro i_t , em regime de juro composto.....	114
Figura 25 - Vários capitais aplicados à mesma taxa de juro i , em regime de juro composto.....	115
Figura 26 - Representação esquemática da equivalência de capitais em dois momentos diferentes.....	116
Figura 27 - Capitais equivalentes no momento t	117
Figura 28 - Capitais equivalentes no momento t	117
Figura 29 - Representação esquemática da capitalização, em regime de juro composto.....	141
Figura 30 - Representação esquemática do desconto, em regime de juro composto.	142
Figura 31 - Representação esquemática do desconto por dentro ou desconto racional	143
Figura 32 - Representação esquemática do desconto comercial, em regime de juro composto.....	146
Figura 33 - Representação esquemática da capitalização do valor atual de um efeito comercial.....	152
Figura 34 - Representação esquemática de rendas segundo o vencimento do primeiro pagamento.....	161
Figura 35 - Representação esquemática do valor final de uma renda representada pelo somatório de todos os seus termos, no momento t	162
Figura 36 - Representação esquemática do valor atual de uma renda representada pelo somatório de todos os seus termos, no momento zero.....	162

ÍNDICE FIGURAS

Figura 37 - Representação esquemática de um conjunto de capitais que constituem uma renda imediata anual constante e de termos postecipados.....	163
Figura 38 - Valor atual dos termos de uma renda.....	164
Figura 39 - A transferência de todos os capitais unitários é feita de uma só vez, para o momento zero.....	167
Figura 40 - Transferência simultânea dos termos de uma renda, através do fator de atualização α . $\alpha_{t l}$	176
Figura 41 - Representação esquemática da atualização e capitalização de um capital α' em regime de juro simples	179
Figura 42 - Representação esquemática dos termos de uma renda imediata anual constante de t termos postecipados.....	183
Figura 43 - Representação esquemática da transferência dos termos de uma renda para o momento t	183
Figura 44 - Representação esquemática da transferência simultânea dos termos de uma renda para o período t através do fator de capitalização $S_{t l}$	185
Figura 45 - Representação esquemática da atualização de vários capitais para o momento zero.....	186
Figura 46 - Representação esquemática da capitalização de vários capitais ao momento t	189
Figura 47 - Representação esquemática da capitalização de vários capitais ao momento $t+h$	190
Figura 48 - Atualização do fator de capitalização de uma renda $S_{t l}$, à taxa de juro composto i pelo tempo t , obtendo-se o fator de atualização $\alpha_{t l}$	193
Figura 49 - Capitalização do fator de atualização de uma renda $\alpha_{t l}$, à taxa de juro composto i pelo tempo t , obtendo-se o fator de capitalização $S_{t l}$	193
Figura 50 - Diagrama cronológico de um conjunto de t capitais	194
Figura 51 - Representação esquemática da transferência dos termos de uma renda imediata anual constante de t termos antecipados para o momento zero	195
Figura 52 - Representação esquemática da transferência dos termos de uma renda anual constante imediata de termos unitários e antecipados, para o momento t	199
Figura 53 - Representação esquemática dos termos (α) de uma renda constante anual em que o primeiro vencimento tem lugar no momento $p+1$	200

Figura 54 - Representação esquemática da atualização dos termos de uma renda constante anual em que o primeiro vencimento tem lugar no momento $p + 1$, ou transferência simultânea de todos os capitais ao momento p pelo fator de atualização de uma renda $a_{t }$	200
Figura 55 - Representação esquemática da atualização do valor de uma renda no momento p para o momento zero.....	201
Figura 56 - Exemplo de uma renda diferida 3 anos, postecipada, tendo o primeiro vencimento no momento 4.....	202
Figura 57 - Valor final de uma renda diferida de termos postecipados.....	203
Figura 58 - Valor atual de uma renda diferida com termos antecipados, com um diferimento de p períodos.....	204
Figura 59 - Transferência de V_p para V_a pela atualização do número de períodos de diferimento.....	205
Figura 60 - Renda imediata postecipada.....	210
Figura 61 - Renda imediata antecipada.....	210
Figura 62 - Renda diferida em 4 anos e postecipada.....	211
Figura 63 - Renda diferida em 4 anos e antecipada.....	211
Figura 64 - Renda imediata postecipada de termos infinitos.....	212
Figura 65 - Renda imediata antecipada de termos infinitos.....	213
Figura 66 - Renda diferida postecipada de termos infinitos.....	214
Figura 67 - Renda diferida antecipada de termos infinitos.....	215
Figura 68 - Representação esquemática de uma renda constante fracionada em k - <i>esimais</i> períodos.....	217
Figura 69 - Representação esquemática do valor final de uma renda de tk termos, à taxa de juro k - <i>esimal</i> (i_k).....	227
Figura 70 - Representação esquemática de uma renda constante com periodicidade superior ao ano.....	239
Figura 71 - Fórmula resolvente da soma dos termos de uma progressão geométrica decrescente.....	240
Figura 72 - Representação esquemática de uma renda bianual.....	252
Figura 73 - Representação esquemática de uma renda em progressão aritmética de razão p	254
Figura 74 - Decomposição de uma renda em progressão aritmética de razão p	255
Figura 75 - Diagrama cronológico de uma renda anual perpétua variável em progressão aritmética.....	264
Figura 76 - Diagrama cronológico de uma renda anual variável em progressão geométrica.....	272

Figura 77 - Diagrama cronológico de uma renda anual perpétua variável em progressão geométrica	278
Figura 78 - Representação divisionária de diferentes modalidades de amortização de empréstimos	286
Figura 79 - Representação esquemática de um empréstimo com pagamento único de juros conjuntamente com o capital.....	287
Figura 80 - Reembolso único com pagamento periódico de juros	288
Figura 81 - Representação esquemática do pagamento de juros de um empréstimo com duração de t anos.....	289
Figura 82 - Representação esquemática da atualização dos juros de uma só vez utilizando o fator de atualização.....	289
Figura 83 - Cancelamento antecipado de um empréstimo amortizável com reembolso único de capital e juros com cancelamento total $[(i)' \geq (i)]$	293
Figura 84 - Cancelamento antecipado total de um empréstimo amortizável com reembolso único de capital e juros $[(i)' \geq (i)]$	294
Figura 85 - Cancelamento antecipado total de um empréstimo amortizável com reembolso único de capital e juros $(i)' < (i)$	297
Figura 86 - Cancelamento antecipado total $[(i)' < (i)]$ de um empréstimo amortizável com reembolso único de capital e pagamento periódico de juros	302
Figura 87 - Cancelamento antecipado par $[(i)' < (i)]$ de um empréstimo amortizável com reembolso único de capital e pagamento periódico de juros.....	303
Figura 88 - O valor de P_h capitalizado à taxa de juro de mercado i' por $(t - h)$ períodos	304
Figura 89 - Os juros anuais e que agora serão $S_h \cdot i$ valorizados ao momento t à taxa de mercado i'	304
Figura 90 - O saldo S_h que fica pendente de amortização	304
Figura 91 - Amortização de um empréstimo mediante uma renda.....	312
Figura 92 - Amortização de um empréstimo mediante uma renda cujos termos são iguais	314
Figura 93 - Representação esquemática da amortização progressiva de um empréstimo ou sistema francês	314
Figura 94 - Amortização de um empréstimo mediante uma renda anual constante diferida d anos e postecipada.....	325

Figura 95 - Amortização de um empréstimo mediante uma renda anual constante diferida d anos e postecipada em que durante os anos que perdura o diferimento não se pagam juros	326
Figura 96 - Amortização de um empréstimo mediante uma renda constante fracionada	330
Figura 97 - Atualização de uma renda de termos k -esimais	331
Figura 98 - Representação esquemática da amortização progressiva de um empréstimo ou sistema francês	334
Figura 99 - Representação esquemática de amortização de empréstimos com juros antecipados (sistema alemão)	340
Figura 100 - Valor no momento h de todas as quotas de reconstrução destinadas ao fundo e valoradas à taxa de juro (i')	356
Figura 101 - Representação esquemática de plena propriedade ou reserva matemática e nua-propriedade.....	361
Figura 102 - Representação esquemática do valor de um empréstimo no momento h	362
Figura 103 - Plena propriedade representada pela soma do usufruto e nua-propriedade.....	363
Figura 104 - Representação esquemática de um empréstimo amortizável por quotas constantes.....	367
Figura 105 - Representação cronológica da determinação da nua-propriedade de um empréstimo amortizável por quotas constantes.....	368
Figura 106 - Representação cronológica do cálculo da nua-propriedade pelo sistema alemão	368

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Representação gráfica da função monótona crescente, ilustrativa da capitalização de um capital, em regime de juro simples.....	57
Gráfico 2 - A função D_f é, portanto, de uma função linear, crescente, que nasce na origem e que aumenta à medida que aumenta t	73
Gráfico 3 - A função do desconto por dentro D_d , nasce também no ponto $(0,0)$, já que, se $t = 0$, o valor $\frac{t_0}{1+t_0} = \frac{0}{1} = 0$	75
Gráfico 4 - O desconto por dentro D_d por muito grande que seja t , nunca atingirá o valor nominal, o que prova a racionalidade deste desconto	76
Gráfico 5 - Representação gráfica da função de capitalização composta.....	107
Gráfico 6 - Convenção linear vs convenção exponencial.....	123
Gráfico 7 - Construção da equação da reta	124
Gráfico 8 - Função $(1+i)^t$	127
Gráfico 9 - Reta em que se baseia a interpolação	128
Gráfico 10 - Representação gráfica conjunta da capitalização simples e composta	131
Gráfico 11 - Representação gráfica das funções do D_f e do D_d em regime de juro composto.....	151

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Períodos de tempo e respetivos <i>k-ésimos</i>	48
Tabela 2 - Ilustração do cálculo de juro simples utilizando o divisor fixo e Números	56
Tabela 3 - Ilustração do cálculo do desconto por fora utilizando o divisor fixo e Números	82
Tabela 4 - Dedução da fórmula de capitalização composta $C_t = C_0(1+i)^t$	106
Tabela 5 - Tabela financeira $(1+i)^t$	108
Tabela 6 - Comparação entre capitalização simples e capitalização composta.....	130
Tabela 7 - Fracionamento da taxa de juro.....	132
Tabela 8 - Dedução da expressão analítica do valor atual ou valor efetivo de um efeito comercial.....	145
Tabela 9 - Classificação das rendas.....	159
Tabela 10 - Soma dos termos de uma progressão geométrica decrescente.....	165
Tabela 11 - Expressão geral da soma dos termos de uma progressão geométrica crescente	185

NOTA DE APRESENTAÇÃO

O conteúdo deste livro versa sobre noções elementares de Matemática Financeira nas suas vertentes teórica e prática. Apresenta-se como um manual de estudo e de suporte para aplicações profissionais, nomeadamente em aspetos relacionados com a prática bancária e seguradora.

A nível académico, destina-se aos estudantes dos cursos de gestão empresarial, gestão bancária e seguradora, contabilidade e auditoria, economia e de métodos quantitativos de análise e gestão financeira.

Este livro resultou do meu trabalho de docente, que teve como suporte um conjunto alargado de fontes bibliográficas que versam esta temática, e do inestimável contributo dos meus alunos. Estes, através de questões e dúvidas sobre o desenvolvimento de certas matérias, ensinaram-me a expor os mesmos temas através de abordagens mais simples e compreensíveis, sem abandonar o rigor técnico e científico dos seus conteúdos.

Uma das dificuldades mais evidenciadas, atualmente, pelos estudantes incide sobre o desenvolvimento matemático e das suas transições no prosseguimento do método dedutivo, que me conduziu a apresentar todas as passagens, mesmo aquelas que parecem demasiado evidentes, que por certo serão para alguns, mas não serão para todos.

Com a publicação do Decreto-Lei 64/2006, de 21 de março, que regula o acesso ao ensino superior por maiores de 23 anos, novos desafios foram colocados aos professores no ensino ministrado a estudantes, os quais já não têm muito presentes estas matérias. Esta constatação tem constituído algumas barreiras à aprendizagem e assimilação das noções básicas da matemática, dentro dos calendários dos períodos letivos, destinados à unidade curricular de Cálculo Financeiro.

Este livro tenta mitigar algumas dessas dificuldades, apresentando através de figuras, gráficos e tabelas os suportes das explicações teóricas que lhes permitem uma aprendizagem mais célere.

Como ponto de partida, apresenta-se o alcance que exprime a razão de ser desta temática, ou seja, o **valor do dinheiro ao longo do tempo** e das variáveis que lhe estão associadas.

O **Capítulo I** trata a utilização do capital por terceiros, através de operações de empréstimo, ou pela aplicação desse capital em investimentos, e terá sempre como objetivo uma recompensa. A quantia que recompensa a aplicação ou a utilização do capital por terceiros designa-se por *juro*. Este, produzido pela aplicação de certas regras financeiras, gerará um novo capital e cujo processo se designa por *capitalização*.

O **Capítulo II** trata a *capitalização simples*, deduzindo-se a sua fórmula geral e através dela a possibilidade de cálculo do *capital inicial*, do *juro*, do *tempo* e da *taxa de juro*.

O **Capítulo III** versa sobre o conceito oposto ao da capitalização ou *desconto*, matéria muito utilizada nas práticas bancárias no desconto de letras. Aqui introduzem-se os conceitos de desconto por fora, desconto bancário ou desconto comercial e o desconto por dentro, ou desconto racional.

O **Capítulo IV** regressa à capitalização, mas desta vez à *capitalização composta*, caracterizada por acumular ao capital principal os juros, produzindo juros cada vez maiores, nos sucessivos períodos de tempo.

O **Capítulo V** introduz o *desconto composto*, que, sendo o oposto à capitalização composta, traduz a transferência de um capital de um momento a outro anterior, utilizando a taxa de juro composto, no seu processo de atualização desse capital.

O **Capítulo VI** estuda as *rendas* que constituem um conjunto de capitais financeiros cujos vencimentos são equidistantes, isto é, que se vencem com a mesma periodicidade. Aqui, classificam-se as rendas segundo a sua natureza, periodicidade, vencimento do primeiro pagamento, número de termos e ainda segundo o seu regime de capitalização. Neste capítulo, utilizam-se certos símbolos próprios de notação da matemática financeira e cuja finalidade é a de abreviar e resumir uma série de cálculos financeiros que estão já traduzidos em tabelas financeiras, evitando um conjunto de cálculos necessários à sua determinação. São exemplos desta notação os símbolos $a_{t|i}$ e $S_{t|i}$, entre outros, e cuja explicação será encontrada no desenvolvimento deste capítulo.

O **Capítulo VII** diz como se *amortizam empréstimos*, quer por reembolso único, quer por reembolso parcial do capital emprestado, e as equivalências nos resultados finais, derivadas do momento em que se introduzem alterações de amortização antecipada nos contratos inicialmente acordados entre o mutuante e o mutuário. Estas negociações apelam ao interesse do mutuante em aceitar ou não as propostas do mutuário, atendendo às taxas de juro que vigoram no momento no mercado, face àquela que foi acordada no momento do empréstimo. São também tratadas as amortizações de empréstimos mediante rendas, utilizando vários sistemas, nomeadamente o francês, o alemão e o americano.

O **Capítulo VIII** aborda os empréstimos por obrigações ou empréstimos obrigacionistas. As obrigações como títulos de crédito podem ser emitidas quer por empresas quer pelo Estado, sendo que, quando emitidas por este, são designadas por obrigações do tesouro (OT) e bilhetes de tesouro. Os procedimentos que se utilizam mais frequentemente na amortização de empréstimos obrigacionistas são,

nomeadamente, a amortização mediante uma renda anual constante e a amortização mediante quotas anuais constantes. Para uma melhor compreensão das transferências de capital entre os diversos momentos em que decorre o empréstimo, são utilizadas diversas representações esquemáticas dos respetivos processos.

O **Capítulo IX** incide sobre o cálculo da taxa anual efetiva (TAE) quer do rendimento da aplicação do capital, através do empréstimo, quer do custo efetivo desse empréstimo, ou seja, depois de suportados encargos, comissões bancárias e outros custos inerentes aos processos de concessão de crédito.

Em **Anexos** apresentam-se tabelas financeiras mais frequentemente utilizadas no cálculo financeiro.

I

INTRODUÇÃO

Os bancos, as instituições parabancárias e as empresas não financeiras têm que, diariamente, tomar múltiplas decisões, nomeadamente, decisões de crédito e decisões de investimento. Estas decisões visam a obtenção de um benefício, num determinado período de tempo.

Naturalmente que esse benefício será o *lucro*, ou seja, um determinado capital que ficará sujeito a destinos diversos, designadamente à satisfação de compromissos com os fornecedores, ao cumprimento de obrigações fiscais e outras obrigações, por um lado, e, por outro lado, a aplicações alternativas, tais como à distribuição pelos acionistas/sócios, ao empréstimo a terceiros e ao investimento.

Se aquele capital for *distribuído* pelos acionistas/sócios, significa que se estará a recompensar aqueles que investiram no negócio, remunerando a aplicação dos respetivos capitais.

Se o mesmo capital for *emprestado*, significa que se estará a ceder temporariamente a sua disponibilidade a terceiros, esperando-se receber no futuro o capital emprestado mais uma determinada quantia. Esta quantia é destinada a minorar os efeitos da erosão que aquele valor sofreu durante o período do empréstimo, bem como recompensar a indisponibilidade da sua utilização e a remunerar o risco de incumprimento do devedor.

Se o capital for *investido*, significa que se estará a sacrificar a disponibilidade presente desse valor, esperando-se que os resultados obtidos tragam no futuro a recompensa esperada daquela decisão.

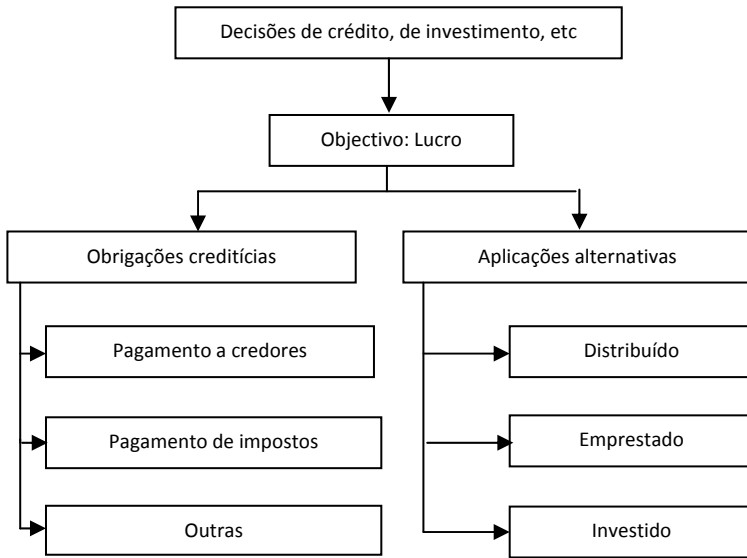


Figura 1 - Representação esquemática de diversas aplicações do lucro

A quantia que recompensa a aplicação ou a utilização do capital por terceiros designa-se por **juro**. A pessoa que empresta dinheiro a juros designa-se por prestamista¹.

O **juro** estará assim dependente do **capital** emprestado ou investido, do **tempo** que durar o empréstimo ou a amortização do investimento e da **taxa de juro** que for fixada na operação financeira.

Entende-se por **operação financeira** toda a ação destinada a substituir um capital ou vários, por outros, em diferentes momentos, aplicando-se-lhe uma determinada regra financeira, num determinado momento de referência.

O juro produzido pela aplicação dessa regra financeira será adicionado ao capital inicial, resultando um novo capital que se designará por **capital final** ou **montante**.

Ao processo que permite determinar o capital final designa-se por **capitalização**.

A capitalização apresenta dois regimes diferentes: a **capitalização simples** e a **capitalização composta**, que serão desenvolvidos nos próximos capítulos.

1 - Novo Dicionário da Língua Portuguesa – Lello Editores

II

CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

2.1. Introdução

O regime de capitalização simples caracteriza-se por não ser acumulável o juro produzido, em cada período, com o capital principal.

O juro produzido em qualquer período será o resultado do produto do *capital inicial* por uma *taxa de juro*. No fim de cada período, o juro produzido será entregue ao *mutuante*² (quem emprestou), mantendo-se o *mutuário*³ (quem pediu emprestado) devedor do capital que lhe foi emprestado inicialmente.

Representando-se por:

J_t – Juro no período t ; C_0 - Capital inicial (momento zero); i - taxa de juro :

Juro no primeiro ano	$J_1 = C_0 \cdot i$
Juro no segundo ano	$J_2 = C_0 \cdot i$
Juro no terceiro ano	$J_3 = C_0 \cdot i$
...	...
Juro no ano $(t-1)$	$J_{(t-1)} = C_0 \cdot i$
Juro no ano t	$J_t = C_0 \cdot i$

$$J = C_0 \cdot i \quad [1]$$

2. Que ou pessoa que mutua ou dá por empréstimo.

3. Pessoa que recebe alguma coisa por empréstimo.

2.2 Fórmula geral da capitalização simples

Para deduzir a fórmula geral de capitalização simples bastará somar ao capital inicial (C_0) o juro total (J) produzido nos respetivos períodos. Admitindo-se que cada período representaria um ano, no final de cada ano do montante obtido (C_t) será o resultado da adição ao capital inicial (C_0) o juro correspondente aos t períodos.

Assim, no final de cada ano, o montante (C_t) será:

No fim do ano 1	$C_1 = C_0 + J_1$	$C_1 = C_0 + C_0 \cdot i$	$C_1 = C_0(1 + i)$
No fim do ano 2	$C_2 = C_0 + J_1 + J_2$	$C_2 = C_0 + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i$	$C_2 = C_0(1 + 2i)$
No fim do ano 3	$C_3 = C_0 + J_1 + J_2 + J_3$	$C_3 = C_0 + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i$	$C_3 = C_0(1 + 3i)$
...
No fim do ano t	$C_t = C_0 + J_1 + J_2 + J_3 + \dots + J_t$	$C_t = C_0 + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + \dots + C_0 \cdot i$	$C_t = C_0(1 + ti)$

Poder-se-á, deste modo, concluir que, se o investimento ou empréstimo durar t anos, o capital final (C_t) ou montante obtido será:

$$C_t = C_0(1 + ti) \quad [2]$$

A fórmula geral de capitalização simples indica que o capital final (C_t) foi obtido ao investir um capital inicial (C_0) a uma taxa de juro i , durante t anos.

Se admitirmos que o capital investido (C_0) é igual à unidade ($C_0 = 1$), resultará:

$$C_t = 1(1 + ti) = 1 + ti$$

Portanto, $1 + ti$ é o valor final que se obtém ao investir uma unidade monetária à taxa de juro anual simples i durante t períodos anuais.

Representando esquematicamente:

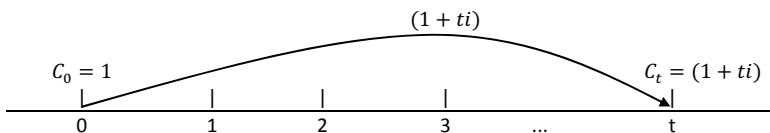


Figura 2 - Representação esquemática do fator de capitalização aplicado ao capital inicial, em regime de juro simples.

Considerar-se-á a partir de agora que $(1 + ti)$ é o *fator de capitalização* em regime de *juro simples*. Este fator serve para transferir capitais de um dado momento para um outro posterior.

Exemplo 1

Calcular o capital final que se obtém ao investir 8000 € à taxa de *juro simples* de 5% ao ano (a.a.) durante 4 anos.

Resolução:

• Dados:

$$C_0 = 8000 \text{ €}$$

$$i = 5\%$$

$$t = 4$$

• Incógnita: C_4

• Fórmula: $C_t = C_0(1 + ti)$

• Resposta: $C_4 = 8\,000(1 + 4 \times 0,05) = 9\,600 \text{ €}$

2.3 Cálculo do capital inicial (C_0)

Partindo da expressão geral de capitalização simples $C_t = C_0(1 + ti)$ e conhecendo-se o capital final (C_t), o tempo t e a taxa de juro i , facilmente se poderá calcular o valor do capital inicial C_0 .

$$C_0 = \frac{C_t}{(1+ti)} \quad [3]$$

que também poderá ser expresso por:

$$C_0 = C_t(1 + ti)^{-1} \quad [4]$$

O *fator de atualização* $(1 + ti)^{-1}$ em capitalização simples tem por função transferir capitais de um dado momento para um outro anterior.

Multiplicando o capital final (C_t) pelo *fator de atualização* $(1 + ti)^{-1}$, obter-se-á o capital inicial (C_0).

Exemplo 2

Calcular o capital que foi investido à taxa de *juro anual simples* de 6% durante 5 anos e que atingiu no fim desse período um montante de 9360 €.

Resolução:

- Dados:

$$C_5 = 9360 \text{ €}$$

$$t = 5$$

$$i = 0,06$$

- Incógnita: C_0

- Fórmula: $C_0 = C_t(1 + ti)^{-1}$

- Resposta: $C_0 = 9360 \times (1 + 5 \times 0,06)^{-1} = 7200 \text{ €}$

2.4 Cálculo do juro (J)

O juro é a diferença entre o capital final (C_t) e o capital inicial (C_0). Portanto:

$$J = C_t - C_0 \quad [5]$$

mas $C_t = C_0 \cdot (1 + ti)$ e substituindo em [5] virá $J = C_0 \cdot (1 + ti) - C_0$, e colocando C_0 em evidência, obtém-se:

MATEMÁTICA FINANCEIRA

O conteúdo deste livro versa sobre noções elementares de Matemática Financeira nas suas vertentes teórica e prática. Apresenta-se como um manual de estudo e de suporte em aplicações profissionais, nomeadamente em aspetos relacionados com a prática bancária e seguradora.

A nível académico, destina-se aos estudantes dos cursos de gestão empresarial, gestão bancária e seguradora, contabilidade e auditoria, economia e de métodos quantitativos de análise e gestão financeira.

Como ponto de partida, exprime a razão de ser desta temática, ou seja, o valor do dinheiro ao longo do tempo e das variáveis que lhe estão associadas.

Por toda a extensão dos capítulos são desenvolvidas, em termos matemáticos, as fórmulas que são utilizadas na resolução de casos práticos. Desde a utilização do capital por terceiros, através de operações de empréstimo, ou pela aplicação desse capital em investimentos, apuramento de taxas e juros, cálculo e determinação de rendas, este livro contempla as matérias normalmente lecionadas nos cursos superiores desta unidade curricular, constituindo um manual de referência para estudantes e professores.



**Universidade
Europeia**

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

www.vidaeconomica.pt
<http://livraria.vidaeconomica.pt>

ISBN: 978-972-788-893-1

